Hiperbolikus programozási feladat

Dr. Kövér György

A lineáris programozási feladat megoldására kidolgozott szimplex módszer alkalmas módosítások után felhasználható nemlineáris feladatok megoldására is.

A hiperbolikus programozási feladat a célfüggvényben tér el a lineáris modelltl. A célfüggvény két lineáris függvény hányadosa. A hányados alakú célfüggvény gyakori, megtalálhatjuk közgazdasági alkalmazásokban. A gyakorlatban megfogalmazhatjuk a következképpen:

Határozzuk meg a vállalat termékösszetételét, ha ismert az egyes termékek darabonkénti elállítási költsége, valamint a darabonkénti nyeresége. Határozzuk meg azt a termelésszerkezetet, amrly mellett az egy forint költségre jutó nyereség a legnagyobb!

Határozzuk meg

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeket úgy, hogy maximalizálják a

$$z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n - d_0}$$

célfüggvényt, minözben eleget tesznek a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_x \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_x \le b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_x \le b_m$$

lineáris egyenltlenségrendszernek.
Mint a bevezet feladatunkban, ismét feltesszük, hogy nemnegatív megoldásokat fogadunk csak el, vagyis $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$.

Mátrix és vektor jelöléseket alkalmazva, ahol a mátrixokat és vektorokat félkövér betkkel jelöljük, a következ formulákhoz jutunk:

maximalizálandó □ $z = \dfrac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - c_0}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} - d_0}$

feltéve, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$

ahol $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} = [c_1,\ c_2, ..., c_n]$, $\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}} = [d_1,\ d_2, ..., d_n]$, $\quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$.

Természetesen a megengedett megoldások halmazán a célfüggvény nevezje nem veheti fel a zérus értéket.

$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} - d_0 \neq 0.$

Kimutatható ugyanakkor, ha a nevez a megengedett megoldások halmazán egyetlen $\boldsymbol{x}$ esetén sem nulla, akkor eljelet sem vált. A fejezet további részében feltételezzük, hogy a célfüggvény nevzje pozitív, amennyiben $\boldsymbol{x}$ eleme a megengedett megoldások halmazának.

$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} - d_0 > 0.$

A módszert, melyet Martos Béla dolgozott ki, normálfeladathoz tartozó feltételrendszerrel mutatjuk be, de megszorítás nélkül alkalmazható a módosított normál és az általános feladat feltételrendszere mellett is.

A módszer lényegét két részlet képezi.

Az els tennivaló az, hogy a tört alakú célfüggvény számlálóját és nevezjét a szimplex induló táblázat külön-külön sorában elhelyezzük úgy, mint a feltételrendszer egyes egyenltlenségeit. Azért van erre szükség, hogy a bázis-transzformációban a célfüggvényben szerepl értékek is részt vegyenek, úgy, mint az együttható mátrix (**A**) elemei.

A másik dolgunk az, hogy a szimplex táblázatok által szolgáltatott bázismegoldásokról eldöntsük, hogy a megoldás optimális-e?

A bázismegoldás optimalitását a bázis-transzformációnak alávetett célfüggvény-számlálóból és -nevezbl képzett $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ vektor elemeinek eljele alapján határozhatjuk meg. Képezzük tehát:

$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}} = c_0\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}} - d_0\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}$

vektort az indulótáblából, majd minden egyes báziscserét követően.
A megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ vektor egyetlen eleme sem pozitív.

Vagyis $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}} \leq \boldsymbol{0}^{\boldsymbol{T}}$.

Az optimalitás kritériumán túl arra is eszközt kaptunk, hogy melyik változót vonjuk be a bázisba. Az olvasó is ellenrizheti, hogy akkor növekszik a célfüggvényünk értéke, ha olyan változót vonunk be a megoldásba, melyre a $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}} = c_0\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}} - d_0\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}$ vektorban szerepl érték pozitív.

A hiperbolikus programozási feladat megoldásának fent részletezett módszerét egy példán keresztül mutatjuk be.

Tekintsük a következ hiperbolikus programozási feladatot.

Példa: hiperbolikus programozási feladat megoldása a Martos módszer szerint

1. Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 \le 4$$

Célfügvény:

$$\frac{x_1 + 4 \cdot x_2 + 1}{3 \cdot x_1 + x_2 + 1}$$

A feladatot a következ induló táblában fogalmazzuk meg:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 6 \\ u_2 & 2 & -1 & 4 \\ c & 1 & 4 & -1 \\ d & 3 & 1 & -1 \\ t & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg c_0 és d_0 eljelhelyes értékét az induló táblában. $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ elemeit a módszer fent ismertetett képlet szerint számítottuk.
 Az induló táblából leolvashatjuk az induló bázismegoldást: $x_1 = 0, x_2 = 0.$
A megoldás nem optimális. A célfüggvényünk nevezje nemnegatív megoldás esetén pozitív, a módszerben szerepl feltétel szerint a megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ elemei negatívak.
Az indulótáblában megjelöltük a következ generáló-elemet. A generáló-elem kiválasztásának feltételei azonosak a normálfeladatban ismertetettekkel.
A bázis-transzformáció elvégzése után a következ táblázathoz jutunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & 1 & 1 & 6 \\ u_2 & 3 & 1 & 10 \\ c & -3 & -4 & -25 \\ d & 2 & -1 & -7 \\ t & -71 & -3 & \frac{25}{7} \end{bmatrix}$$

Az 1. táblázat b oszlopából leolvasható bázismegoldást: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$,.

A megoldás optimális. A célfüggvényünk nevezje nemnegatív megoldás esetén pozitív, a módszerben szerepl feltétel szerint a megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ elemei negatívak.
Az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvény értékét a táblázat jobb alsó eleme tartalmazza.

$x_1 = 0,\ x_2 = 6,\ z = \frac{25}{7}$.

A hiperbolikus programozási feladat grafikus megoldása

Az elzekben megoldott kétdimenziós feladat grafikus megoldását keressük .

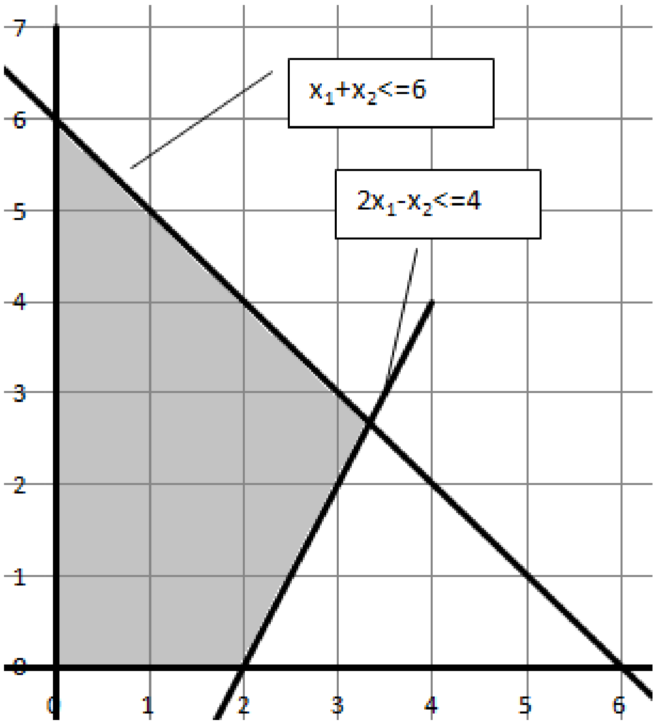
Feltételrendszer:

$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 \le 4$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$\frac{x_1 + 4 \cdot x_2 + 1}{3 \cdot x_1 + x_2 + 1}$$

A grafikus megoldáshoz vezet els lépés a megengedett megoldások halmazának szemléltetése.



A korábbiaktól eltéren Az ábráról hiányzik a célfüggvény. Emlékeztetünk arra, hogyan rajzoltuk meg a lineáris célfüggvény egyenesét.
Tegyük fel, hogy a maximalizálandó célfüggvény:

$z = x_1 + 2\,x_2. \rightarrow$ max

A célfüggvény értékét önkényesen megválasztva

$x_1 + 2\,x_2 = K$

egy egyenes egyenletéhez jutunk, amit a megengedett megoldások halmazát tartalmazó koordinátarendszerben ábrázolhatunk.

A hiperbolikus feladat lineáris tört alakú célfüggvényének ábrázolására hasonló utat választotunk. Önkényesen megválasztjuk a célfüggvény értékét.

$\dfrac{c_1 x_1 + c_2\,x_2 - c_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 - d_0} = K.$ Írjuk át az egyenletünket a következ formába:

$c_1 x_1 + c_2 x_2 - c_0 = K\left(d_1 x_1 + d_2 x_2 - d_0\right).$ K különböz értékeire egyenes sereget kapunk. Létezik egy olyan pont, nevezzük forgáspontnak, amely ponton minden egyenesünk keresztül megy, akárhogy is választjuk meg K értékét. Az egyenletünket bármely K értékre kielégíti az az x_1, x_2 számpár, amely megoldása az

$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 - c_0 = 0$
$d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 - d_0 = 0$ egyenletrendszernek.

A megoldást a következk szerint kapjuk:

$$x_1 = \frac{d_2 \cdot c_0 - c_2 \cdot d_0}{d_2 \cdot c_1 - c_2 \cdot d_1}$$

$$x_2 = \frac{d_1 \cdot c_0 - c_1 \cdot d_0}{d_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot d_2}$$

Az egyenesünk egyenletét a következ formába átírva az egyenes meredekségét határozhatjuk meg.

$(c_1 - Kd_1)x_1 + (c_2 - Kd_2)x_2 = c_0 - Kd_0$, A meredekséget a következképp számíthatjuk ki:

$m = -\dfrac{c_1 - K \cdot d_1}{c_2 - K \cdot d_2}$, ahol $K \neq \dfrac{c_2}{d_2}$

Láthatjuk, hogy az m meredekség függ a megválasztott K értékétl. Deriválással azt is megmutathatjuk, hogy a meredekség monoton függvénye K-nak.

A hányados deriválási szabálya szerint elvégezve kapjuk:

$$\frac{dm}{dK} = \frac{d_1 \cdot c_2 - d_2 \cdot c_1}{(c_2 - K \cdot d_2)^2}.$$

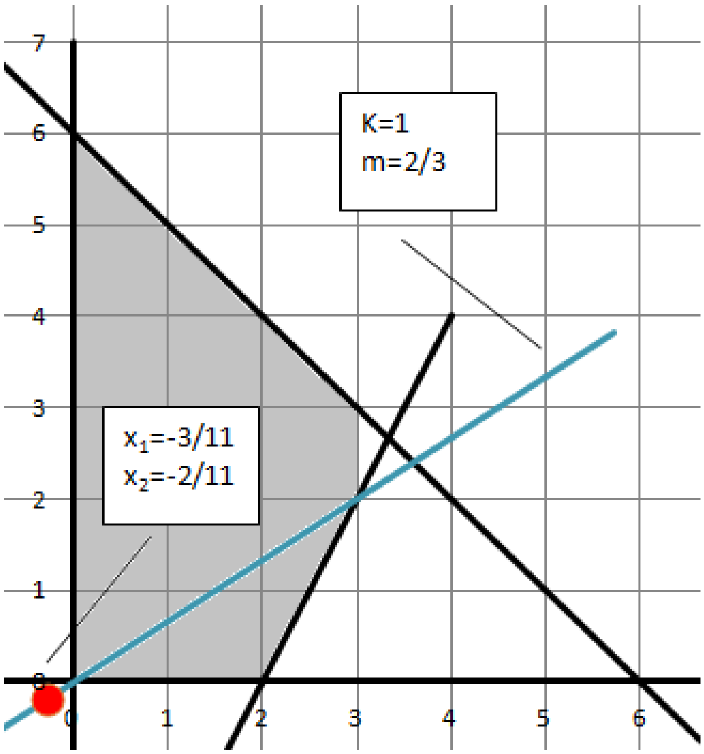
A fenti deriváltról megállapíthatjuk, hogy a K értékétl függetlenül az eljele csak a számlálótól függ, mivel a nevez pozitív, hiszen második hatványon szerepel. Ha a számláló negatív, a meredekség csökken, ha növeljük a K értékét, míg pozitív derivált esetén a meredekség növekszik.

A fenti példára elvégezve a számításokat, a forgáspont koordinátáira kapjuk:

$$x_1 = \frac{d_2 \cdot c_0 - c_2 \cdot d_0}{d_2 \cdot c_1 - c_2 \cdot d_1} = -\frac{3}{11}$$

$$x_2 = \frac{d_1 \cdot c_0 - c_1 \cdot d_0}{d_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot d_2} = -\frac{2}{11}$$

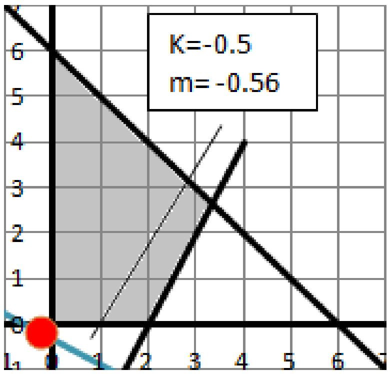
Ha $K = 1$, akkor $m = -\dfrac{c_1 - K \cdot d_1}{c_2 - K \cdot d_2} = \dfrac{2}{3}$. Az egyenest a következ ábrán szemlélhetjük.

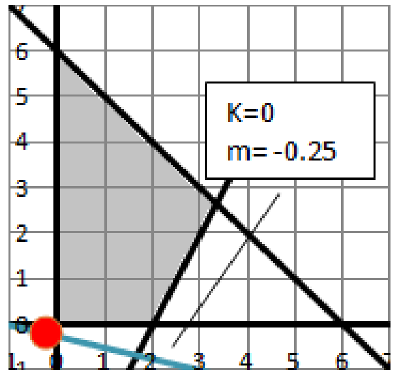


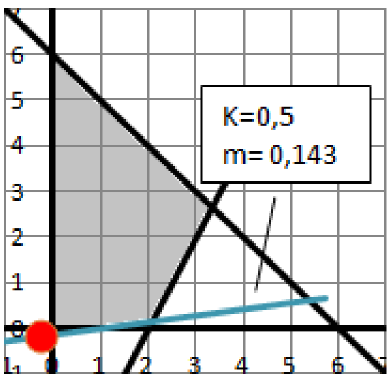
A forgáspont körül elforgatva az egyenesünket növekv konstansok esetén ($K=-0.5$, 0, 0.5, 2, 3, 5) a következ ábrasorozatot kapjuk:

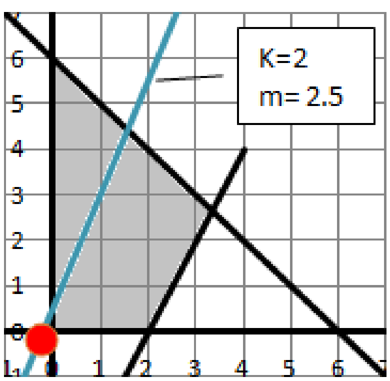
Figyeljük meg, hogy K növelésével a célfüggvényt reprezentáló egyenes meredeksége egyre növekszik.

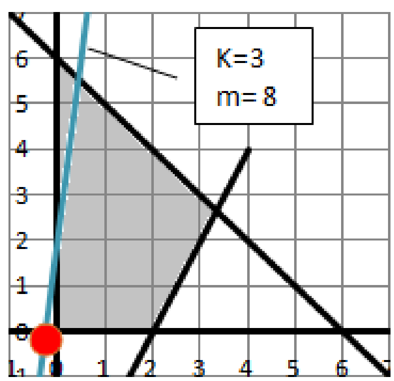
$\frac{dm}{dK}=\frac{d_1\cdot c_2-d_2\cdot c_1}{\left(c_2-K\cdot d_2\right)^2}$. derivált számlálója jelen példában $d_1\cdot c_2-d_2\cdot c_1=11$ ami pozitív és indokolja a meredekség növekedését.

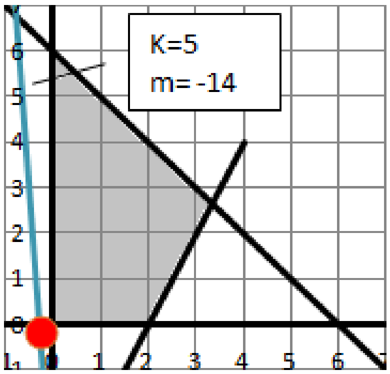

K=-0.5
m= -0.56


K=0
m= -0.25


K=0,5
m= 0,143


K=2
m= 2.5


K=3
m= 8



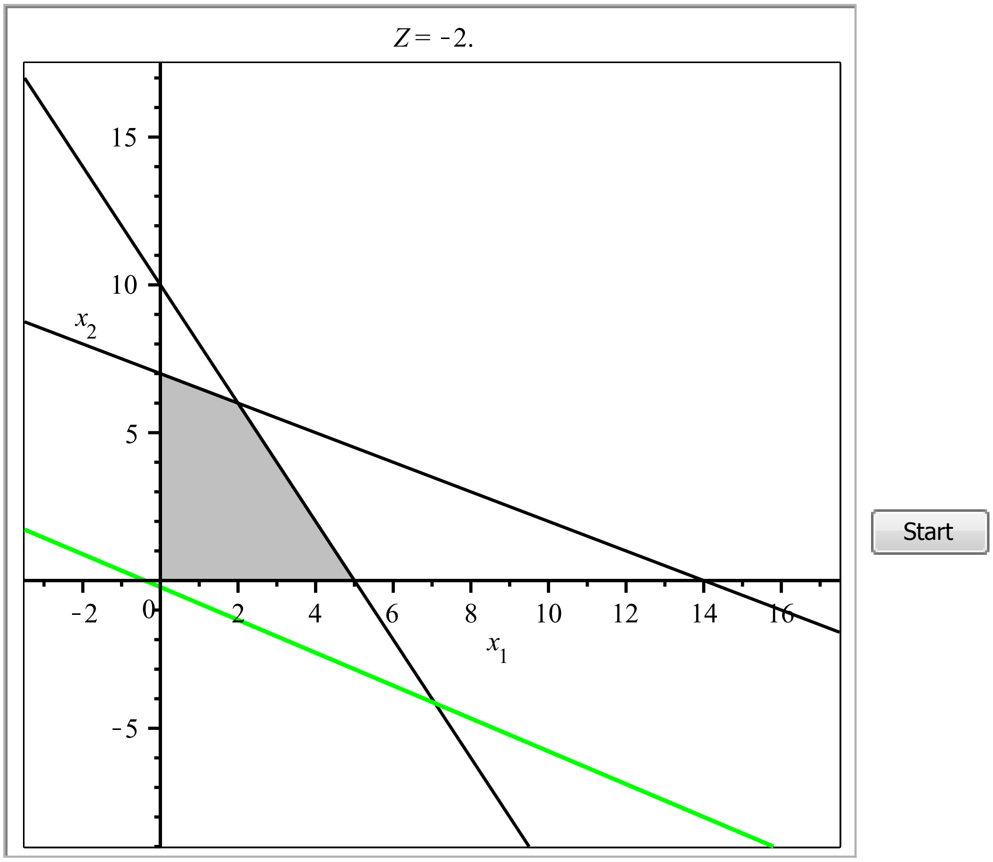
Emlékeztetünk arra, hogy a meredekség K konstanstól függ kifejezése a következ:

$m = -\dfrac{c_1 - K \cdot d_1}{c_2 - K \cdot d_2}$, ahol $K \neq \dfrac{c_2}{d_2}$. Ahol $\dfrac{c_2}{d_2} = 4$. Vegyük észre, hogy a meredekség eljele $K = 3$ és $K = 5$ között pozitívról negatívra változott, az $m(K)$ függvény $K = 4$-nél nem folytonos, nem megszüntethet szakadása van.

Kétváltozós hiperbolikus programozási feladatok grafikus megoldáshoz:

1. feladat

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$
$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 40$$
$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 42$$
$$z = \frac{3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 2}{x_1 + 2 \cdot x_2 + 2} \rightarrow \max$$



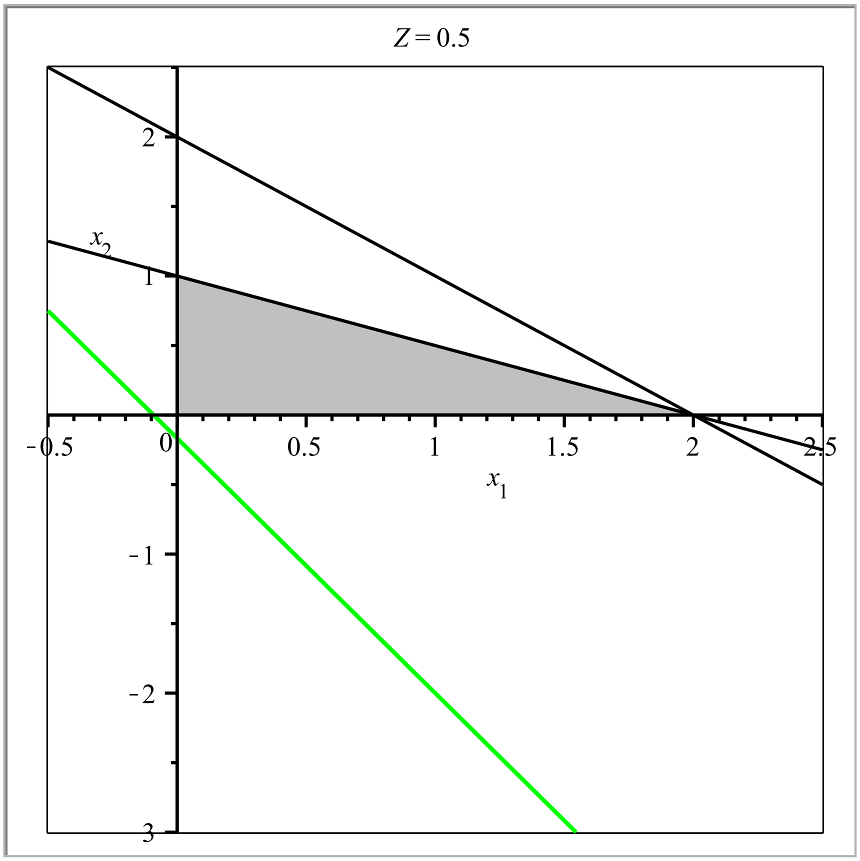
2. feladat

$x_1, \ x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 2$

$$z = \frac{6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2}{x_1 + 2 \cdot x_2 + 3}$$



Start

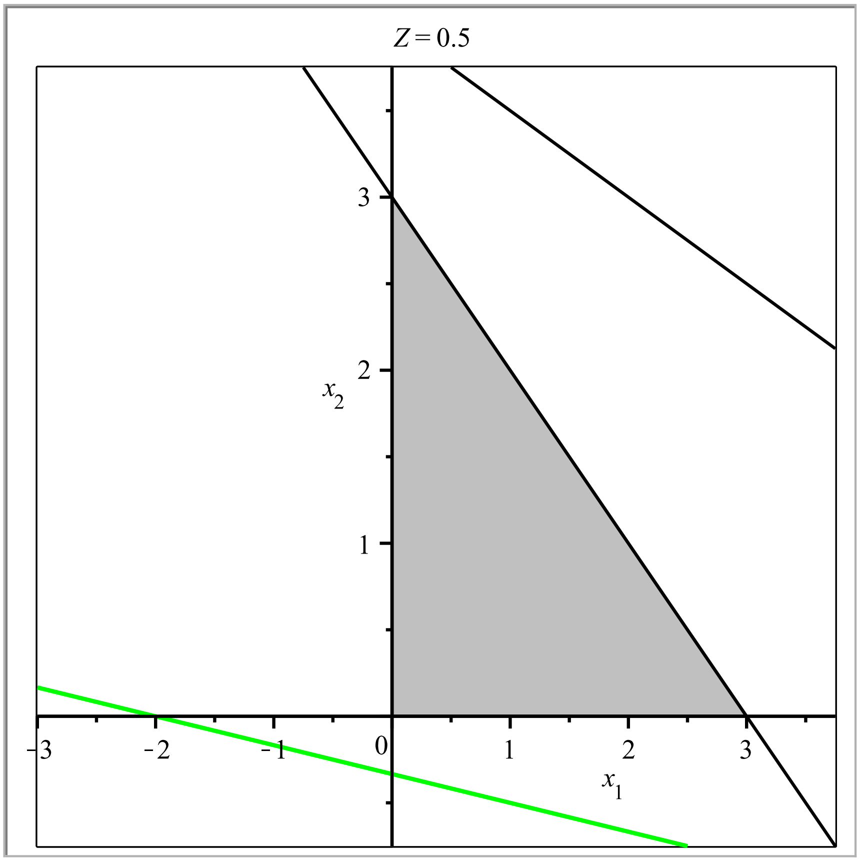
3. feladat

$x_1,\ \ x_2\ \ \geq 0$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 + 2\cdot\ \ x_2 \leq 8$

$$z = \frac{x_1 + 4\cdot x_2 + 2}{x_1 + 2\cdot x_2 + 2}$$



Start

3. Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 13,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \le 12,$$
$$x_2 + x_3 \le 6$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$\frac{5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 - 3}{3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4}$$

A feladatot a következ induló táblában fogalmazzuk meg:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ u_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ c & 5 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ d & 3 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ t & 29 & 11 & 18 & 22 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg c_0 és d_0 eljelhelyes értékét az induló táblában. $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ elemeit a módszer fent ismertet képlete szerint számítottuk.
Az induló táblából leolvashatjuk az induló bázismegoldást: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.
A megoldás nem optimális. A célfüggvényünk nevezje nemnegatív megoldás esetén pozitív, a módszerben szerepl feltétel szerint a megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}}$ elemei negatívak.
Az indulótáblában megjelöltük a következ generáló-elemet. A generáló-elem kiválasztásának feltételei azonosak a normálfeladatban ismertetettekkel. Legyen pozitív, a „szűk keresztmetszet" alapján választjuk.
A bázis-transzformáció elvégzése után a következ táblázathoz jutunk:

A bázis-transzformáció lépéseit az u, c, d sorokra alkalmazzuk, a t sor értékét ezt követen, a módszerben ismertetett

$$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{T}} = c_0\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}} - d_0\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}$$

képlet alkalmazásával határozzuk meg. A kapott táblázat a következ:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & u_2 & b \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ u_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ c & 1 & 2 & -1 & -4 & -45 \\ d & 1 & 1 & 0 & -2 & -28 \\ t & -17 & 11 & -28 & -22 & \frac{45}{28} \end{bmatrix}$$

Az 1. táblából leolvashatjuk a bázismegoldást:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 12$.

A megoldás nem optimális. A célfüggvényünk nevezje nemnegatív megoldás esetén pozitív, a módszerben szerepl feltétel szerint a megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^T$ elemei negatívak.
Az indulótáblában a t sorában található 11 felett megjelöltük a következ generáló-elemet.

2	x_1	u_1	x_3	u_2	b
x_2	0	1	0	-1	1
x_4	1	0	1	1	12
u_3	0	-1	1	1	5
c	1	-2	-1	-2	-47
d	1	-1	0	-1	-29
t	-18	-11	-29	-11	$\frac{47}{29}$

A 2. táblából leolvashatjuk a bázismegoldást:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 12.$

A megoldás optimális. A célfüggvényünk nevezje nemnegatív megoldás esetén pozitív, a módszerben szerepl feltétel szerint a megoldás akkor optimális, ha $\boldsymbol{t}^T$ elemei negatívak.
A táblázat jobb alsó eleme a célfüggvény kiszámítható értékét mutatja, amely az optimális érték.

Feltételrendszer:

$x_1 + x_2 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 4,$
$x_1 \le 5$

Maximalizálandó célfüggvény: $z \rightarrow \max$

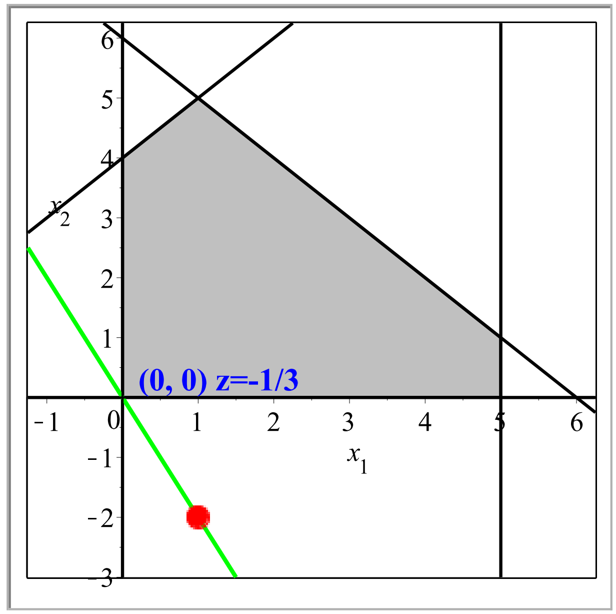
$$\frac{3\,x_1 + x_2 - 1}{x_1 + 2\,x_2 + 3}$$

Válasszon a felkínált feladatok közül!

3. feladat

Szimplextáblázat:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 6 \\ u_2 & -1 & 1 & 4 \\ u_3 & 1 & 0 & 5 \\ c & 3 & 1 & 1 \\ d & 1 & 2 & -3 \\ t & 10 & 5 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



Báziscsere:

u[1] ⇔ x[1]   generáló elem: 1

["a kijelölt elem nem szûk keresztmetszet"]

Végrehajtás

Eredmények:

$[x_1 = 0, x_2 = 0]$

\`célfüggvény\`: $(z = -1)$

a \`megoldás\` nem \`optimális\`